Recenzja rozprawy doktorskiej p. mgr Katarzyny Ryszewskiej
A semigroup approach to the space-fractional diffusion and the analysis of fractional Stefan model
dla Rady Naukowej Dyscypliny Matematyka Politechniki Warszawskiej

1. Informacje wstępne.

Pani Katarzyna Ryszewska ukończyła studia na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej w 2017 roku. Kontynuuje naukę na Studiach doktoranckich PW w dyscyplinie matematyka. W końcu 2020 roku podjęła pracę na etacie asystenta na Wydziale MiNI PW. Jest autorką lub współautorką 6 prac naukowych opublikowanych w dobrych czasopismach matematycznych (spis prac znajduje się na końcu recenzji).

2. Opis rozprawy doktorskiej.

Napisana w języku angielskim rozprawa doktorska *A semigroup approach to the space-fractional diffusion and the analysis of fractional Stefan model* została opublikowana przez Politechnikę Warszawską w 2020 roku. Rozprawa liczy 140 stron, składa się z 5 rozdziałów, spis literatury obejmuje 34 pozycje. Jest to więc zdecydowanie obszerna rozprawa doktorska.

Rozprawa doktorska p. Ryszewskiej poświęcona jest badaniu rozwiązań równania

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x} D^\alpha u = 0, \tag{1}$$

w zbiorze $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$, gdzie operator $D^\alpha, \alpha \in [0, 1]$, jest tzw. *ułamkową pochodną w sensie Caputo rzędu* α. W myśl Definicji 2.18, dla $0 < Re\alpha < 1$, można zapisać ją wzorem:

$$D^\alpha f(x) = I^{1-\alpha} f'(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-s)^{-\alpha} f'(s) ds.$$

To co jest nowego, bądź nietypowego w tej rozprawie, to niestandardowy ułamkowy (fraktalny) operator dyfuzji dany wzorem $\frac{\partial}{\partial x} D^\alpha$. Badaniu jego własności poświęcony jest drugi Rozdział rozprawy. Wspomniane w nim są podstawy teorii półgrup, teorii potęg ułamkowych operatorów nieujemnych (częściej w literaturze badano wcześniej operatory dodatnie); przez operator nieujemny rozumie się tu liniowy operator A określony nw przestrzeni Banacha $A : X \supset D(A) \to X$ którego zbiór rezolwenty zawiera półprostą $(-\infty, 0)$ i spełnione jest oszacowanie

$$\|(A + \lambda)^{-1}\| \leq \frac{M}{\lambda} \quad \text{for } \lambda > 0.$$

Tego typu rozważania wywodzą się z klasycznych już dziś monografii A. Pazy'ego (Springer, 1983), C. Martineza i M. Sanza (Elsevier, 2001), A. Yagi (Springer, 2010), czy nieujętych w tekscie; S.G. Kreina (Nauka, 1967), E.M. Steina (Princeton University Press, 1970), D. Henry'ego (Springer, 1981), a w szczególności szeregu prac H. Komatsu z połowy lat sześćdziesiątych XX wieku, w których wprowadzono nowoczesną definicję ułamkowej potęgi operatora. Na pewno trzeba tu również wspomnieć zacytowane monografie autorów pochodzenia rosyjskiego; S.G. Samko, A.A. Kilbasa i O.M. Maricheva (Gordon and Breach, 1993) czy A.A. Kilbasa, H.M. Srivastovej, J.J. Trujilio (Elsevier, 2006). Te dwie ostatnie pozycje wychodzą bardziej od strony teorii operatorów całkowych i pochodnych ułamkowych. W szczególności w bardzo obszernej monografii [29] (numeracja za rozprawą) znajdziemy rozbudowaną teorię operatorów pochodnej ułamkowej w jednym wymiarze przestrzennym, użytą w rozprawie doktorskiej.

W Rozdziale 3 rozprawy Autorka omawia własności dyfuzyjnego operatora $A := -\frac{\partial}{\partial x} D^\alpha$ na dziedzinie $D_\alpha = \{\phi \in H^{1+\alpha}(0, 1); u_x \in H^\alpha(0, 1), u(1) = 0\}$, gdy $\alpha \in (0, 1)$. W szczególności, sprawdzając założenia tw. Lumera-Philipsa pokazuje, że operator A jest generatorem C^0-półgrupy kontrakcji na przestrzeni $L^2(0, 1)$. I dalej, w Tw. 3.5, że jest to również półgrupa analityczna (bowiem operator A jest *sektorialny* np. w sensie monografii Henry'ego). Chciałbym w tym miejscu wspomnieć o ważnych klasycznych rezultatach zawartych w pracy [7], odnoszących się do związku operatora Stokesa z odwrotnym do operatora minus Laplasa oszacowań podobnych do tych z rozprawy, choć w wyższym wymiarze przestrzennym. Były one używane przez autorów japońskich w badaniach równania Naviera-Stokesa. Podobne własności dla operatora A są rozważania w zakresie stron 29-35 rozprawy.

Podrozdziały 2 i 3 Rozdziału 3 rozprawy poświęcone są badaniu liniowych półgrup związanych z operatorem A rozpatrywanym z warunkami typu Dirichleta (jednorodnym), lub mieszanym (z pochodną ułamkową rzędu α na lewym końcu $(0,1)$.

Rozdział 4 omawia zastosowanie uzyskanych wcześniej własności operatora A do rozwiązania układu równań ze swobodnym brzegiem; problemu Stefana,

$$\begin{aligned} & u_t - Au = 0 \quad (t,x) \in (0,T] \times (0, s(t)), \\ & u_x(t,0) = 0, \quad u(t,s(t)) = 0, t \in (0,T), \\ & s'(t) = -(D^\alpha u)(t, s(t)), t \in (0,T), \\ & u(0,x) = u_0(x), \quad x \in (0, s(0)) = b. \end{aligned} \tag{2}$$

Jest to zasadnicze zagadnienie motywujące powstanie tej rozprawy doktorskiej. Dowodzone w tym rozdziale Twierdzenie 4.1, o istnieniu rozwiązania zadania Stefana, ma skomplikowaną strukturę dowodu. Najpierw transformuje się badany problem na zadanie w obszarze cylindrycznym. Problem ten, z przetworzonym operatorem

$$A(t) := x\frac{s'(t)}{s(t)}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{s^{\alpha+1}(t)}\frac{\partial}{\partial x}D^\alpha$$

jest rozwiązywany w oparciu o klasyczne twierdzenia egzystencjalne dla procesów ewolucyjnych (np. [8]). Przechodzi się tu do powiązanego z badanym problemem różniczkowym równania całkowego (poprzez formułę Cauchy'ego). Budowane w Twierdzeniu 4.2 rozwiąznie należy do klasy $C([0,T]; D_\alpha)$. Dalej badane są kwestie wyższej regularności otrzymanego rozwiązania. Opisana w Lematach 4.4 – 4.6 dodatkowa regularność rozwiązanie jest zdecydowanie najbardziej techniczną częścią rozprawy, zarazem trudną do prześledzenia (Corollary 4.8).

Z kolei Autorka formułuje dla badanego problemu twierdzenie typu Zasady Maksimum (Lemat 4.12). Dostarcza ono oszacowań potrzebnych w kończącym Rozdział 4 Twierdzeniu 4.17, mówiącym o istnieniu rozwiązania problemu Stefana.

W końcowym Rozdziale 5 (a także w końcówce Rozdziału 4) badane są samopodobne (self-similar) rozwiązania problemu Stefana. Narzucając taką specjalną postać rozwiązań, badany układ (problem Stefana) redukuje się do układu równań różniczkowo-całkowych:

$$\begin{aligned} & u_{xx} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t - s^{-1}(x))^{-\alpha}, \\ & s'(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{a\to s(t)} \frac{d}{dt}\left[\int_{s^{-1}(a)}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} u_x(a,\tau)d\tau\right], \end{aligned} \tag{3}$$

z odpowiednimi warunkami dodatkowymi. Istnieniu rozwiązania powyższego układu poświęcone jest Twierdzenie 5.1.

Podczas czytania rozprawy nasunęły mi się następujące pytania:

- Skąd pochodzi pomysł zajęcia się takim właśnie operatorem lepkościowym A?
- Czy wobec jednowymiarowości przestrzennej badanego zagadnienia nie byłoby ciekawe rozpatrzenie tych zagadnień w klasach funkcji absolutnie ciągłych, powiązanych jak wiadomo z przestrzeniami Sobolewa w wymiarze 1 (jak w Prop. 2.26 rozprawy). Częściowo jest to zresztą robione w rozprawie, bowiem teorią przestrzeni Sobolewa przeplata się z teorią funkcji absolutnie ciągłych w wymiarze przestrzennym 1.

3. Dorobek naukowy.

Poza omówioną powyżej rozprawą doktorską p. Katarzyna Ryszewska jest autorką lub współautorką 6 opublikowanych prac naukowych, których spis zamyka niniejszą opinię. Są to prace wydane w dobrych czasopismach matematycznych, jak np. Nonlinear Analysis RWA czy Journal of Mathematical Analysis and Applications. Wszystkie prace zostały opublikowane w latach 2017-2020, co pokazuje duża dynamikę działalności naukowo-badawczej pani Ryszewskiej.

4. Uwagi końcowe.

Opiniowana rozprawa doktorska pani mgr Katarzyny Ryszewskiej stanowi interesujący tekst matematyczny. Dotyczy ona ciekawego zagadnienia z nielokalnym operatorem dyfuzji, czyli zagadnienia będącego przedmiotem modnego obecnie kierunku badań naukowych w zakresie matematyki. Rozprawa jest napisana starannie, nie zauważyłem błędów przy jej czytaniu. Jej napisanie na pewno wymagało także od Autorki dużej pracy redakcyjnej. W moim odczuciu rozprawa ma pewne drobne mankamenty. Po pierwsze, Autorka pominęła szereg istotnych pozycji literatury powiązanych z tematem rozprawy, co starałem się wskazać bezpośrednio w treści opinii. Po drugie, pomimo starannego i poprawnego matematycznie sposobu zredagowania tekstu, jest to jednak matematyka bardzo techniczna, nużąca samymi zapisami. Sam pomysł wprowadzenia nietypowego operatora dyfuzji A, choć ciekawy, rodzi jednak pytanie; czy podobnych wyników nie można otrzymać zastępując użyty w rozprawie operator A powiedzmy operatorem $(-\Delta)^{\beta}$, z ułamkowym wykładnikiem $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$? Te ostatnie operatory są powszechnie używane i badane już od ponad 20 lat, np. w równaniu quasi-geostrophic. Pytania te nie umniejszają jednak wartości zaprezentowanej rozprawy, ciekawej, ładnie napisanej i trudnej.

5. Podsumowanie opinii.

Pragnę zdecydowanie stwierdzić, że rozprawa doktorska pani Katarzyny Ryszewskiej zatytułowana *A semigroup approach to the space-fractional diffusion and the analysis of fractional Stefan model* **spełnie wszelkie formalne oraz zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z matematyki oraz stanowi oryginalne rozwiązanie badanego w rozprawie problemu naukowego. Co więcej, zarówno sama rozprawa jak i opublikowane wcześniej prace naukowe dowodzą posiadania przez p. Ryszweskiej dużej wiedzy teoretycznej i umiejętności potrzebnych do prowadzenia samodzielnych badań naukowych w zakresie teorii równań różniczkowych cząstkowych, dyscyplinie matematyka.**

Wnoszę o dopuszczenie pani magister Katarzyny Ryszewskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Katowice, 09.02.2021.

T. Dłotko,

Prof. dr hab. Tomasz Dłotko

Profesor w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach

Literatura

[1] A. Kubica, P. Rybka, K. Ryszewska, Weak solutions of fractional diffusion equations in noncylindrical domains , Nonlinear Anal. RWA 36 (2017), 154-182.

[2] A. Kubica, K. Ryszewska, Fractional diffusion equation with the distributed order Caputo derivative, Journal of Integral Equations and Applications 31 (2019), 195-243.

[3] A. Kubica, K. Ryszewska. Decay of solutions to parabolic-type problem with distributed order Caputo derivative, J. Math. Anal. Appl. 465 (2018), 75–99.

[4] A. Kubica, K. Ryszewska. A self-similar solution to time-fractional Stefan problem, Math. Methods Appl. Sci. (2020), 1-31.

[5] K. Ryszewska. An analytic semigroup generated by a fractional differential operator, J. Math. Anal. Appl. 483 (2020), 123654.

[6] K. Ryszewska. A space-fractional Stefan problem, Nonlinear Anal. 199 (2020), 112027.

[7] Y. Giga, T. Miyakawa, Solutions in L_r of the Navier–Stokes initial value problem, Arch. Ration. Mech. Anal. 89 (1985), 267–281.

[8] H. Amann, Linear and Quasilinear Parabolic Problems, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.